ALTERNATIVER BEWEIS DES SATZES VON CAVACHI

PETER MÜLLER

Satz. *Seien* $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ *teilerfremde Polynome mit* $\deg g > \deg f$. *Dann ist* $f + pg$ *irreduzibel für alle bis auf endlich viele Primzahlen* p.

Beweis. Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten von f und g können wir $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ annehmen. Sei c der höchste Koeffizient von g und $n = \deg g$. Nach Ersetzen von $f(X)$ und $g(X)$ durch $c^{n-1} f(X/c)$ und $c^{n-1} g(X/c)$ ist zusätzlich $g(X)$ normiert.

Ein Satz von Cauchy, angewandt auf $g(X) + f(X)/p$, liefert eine von p unabhängige Schranke M für den Betrag der Nullstellen von $f(X) + pg(X)$.

Sei nun $f(X) + pg(X)$ reduzibel für eine Primzahl p. Nach dem Lemma von Gauß erhalten wir eine Faktorisierung mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und $1 \le r, s \le n-1$:

$$f(X) + pg(X) = (pX^r + \dots)(X^s + \dots).$$

Seien $y_1, \dots, y_s$ die Nullstellen des zweiten und normierten Faktors $X^s + \dots$. Einsetzen von y_i liefert $pg(y_i) = -f(y_i)$, und Multiplikation für $i = 1, \dots, s$ schließlich

$$p^s \prod_{i=1}^{s} g(y_i) = \pm \prod_{i=1}^{s} f(y_i).$$

Die elementarsymmetrischen Polynome in den y_i sind (bis auf Vorzeichen) die Koeffizienten des Faktors $X^s + \dots$, also ganzzahlig.

Nach dem Hauptsatz über symmetrische Polynome sind dann aber auch $\prod_{i=1}^{s} g(y_i)$ und $\prod_{i=1}^{s} f(y_i)$ ganzzahlig.

Wegen der Teilerfremdheit von f und g gilt zusätzlich $\prod_{i=1}^{s} g(y_i) \neq 0$.

Hieraus folgt

$$p^s = \frac{|\prod_{i=1}^{s} f(y_i)|}{|\prod_{i=1}^{s} g(y_i)|} \le |\prod_{i=1}^{s} f(y_i)|.$$

Wegen $|y_i| \le M$ gilt $|f(y_i)| \le M'$ für eine von i und p unabhängige Konstante M'. Es folgt $p \le M'$. □

Bemerkung. Eine Verfeinerung der Beweisschritte erlaubt es, eine explizite obere Schranke für die Ausnahmeprimzahlen anzugeben.

Date: 18. Mai 2022.